0.1. *Афанасьева С.Д.* Численное решение системы уравнений Навье - Стокса - Кортевега для двухфазной жидкости методом PINN

Задачи численного моделирования двухфазных систем имеют большое значение в гидродинамике, теплофизике и инженерных приложениях. Классическая система уравнений Навье — Стокса описывает движение однофазных вязких сред, однако не учитывает влияние межфазной границы. Для описания фазовых переходов применяется обобщение — уравнения Навье — Стокса — Кортевега (NSK), включающие тензор напряжений Кортевега, описывающий влияние градиентов плотности на динамику жидкости. Модель рассматривает двухфазную жидкость, где граница раздела фаз является диффузионной.

Рассматривается одномерная область $\Omega \subset \mathbb{R}$, $x \in [0, L]$, $t \in [0, t_s]$. Уравнения NSK имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \rho \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} = 0, \qquad (2)$$

где ρ — плотность, u — скорость, μ — коэффициент вязкости, γ — параметр Кортевега.

Система замыкается уравнением состояния Ван-дер-Ваальса:

$$p(\rho) = \frac{\rho R T_{\mathrm{ref}}}{1 - b\rho} - a\rho^2, \qquad (3)$$

где a, b — константы модели, T_{ref} — температура.

Рассматриваемая система (1) — (3) представляет собой задачу с граничными условиями типа Дирихле:

$$u|_\Gamma = u_1, \quad \rho|_\Gamma = \rho_1, \qquad (4)$$

и начальными условиями:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0. \qquad (5)$$

Для численного решения поставленной задачи (1) — (5)используется метод *Physics-Informed Neural Network (PINN)* — современный численных подход к решению дифференциальных уравнений [1]. Метод заключается в аппроксимации неизвестной функции с использованием нейронной сети путем решения задачи минимизации квадратичного функционала:

$$J = J_r + J_{\mathrm{IC}} + J_{\mathrm{BC}} \quad \longrightarrow \quad \min, \qquad (6)$$

где

- J_{IC} — функция потерь, отвечающая за выполнение начальных условий (Initial Conditions Loss);
- J_{BC} — функция потерь для граничных условий (Boundary Conditions Loss);
- J_r — функция потерь, отвечающая за невязку в исходной системе дифференциальных уравнений (Residual Loss).

Обучение нейронной сети построено так, чтобы её выходные значения удовлетворяли системе уравнений Навье–Стокса–Кортевега (1) — (3) и соответствующим начальным (4) и граничным условиям (5).

Полученное решение сравнивается с результатами, полученными при использовании разрывного метода Галеркина [2, 3].

Научный руководитель — Кузнецов К. С.

Список литературы

[1] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. V. 50. No. 3. P. 686–707

[2] Hitz T., Keim J.,Munz C. – D., Rohde Ch. A parabolic relaxation model for the Navier — Stokes — Korteweg equations // Journal of Computational Physics. 2020. Vol. 421.

[3] Tian L., Xu Y., Kuerten J.G.M., van der Vegt J.J.W. A local discontinuous Galerkin method for the (non)-isothermal Navier — Stokes — Korteweg equations // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 295. P. 685-714