Двухсеточный метод решения линейного эллиптического уравнения с регулярными пограничными слоями*

А.И. Задорин
Омский филиал Института математики СО РАН
e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Н.А. Задорин
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

As known, elliptic equation with regular boundary layers can be solved on an uniform mesh or on a mesh, dense in boundary layers. In both cases we have to solve a linear system of equations by iterations. We can reduce a number of iterations, if we preliminarily solve a problem on a coarse mesh. In this case we need to interpolate the mesh solution from a coarse mesh to a fine mesh. In a case of the uniform mesh we construct interpolation, fitted to the boundary layer components. We prove that in a case of Shishkin mesh we may use polynomial interpolation in a two-grid method

Введение

Как известно, равномерная сходимость разностных схем для двумерных линейных эллиптических задач с регулярными пограничными слоями может быть обеспечена сгущением сетки в областях пограничного слоя [1]-[3] или, в случае равномерной сетки, подгонкой схемы к погранслойным составляющим решения [1], [4]-[5]. В обоих случаях пятиточечная разностная схема представляет собой систему линейных уравнений, которая обычно решается на основе итераций.

В работе исследуется, как можно уменьшить количество итераций за счет предварительного решения краевой задачи на грубой сетке. При таком подходе возникает необходимость в интерполяции сеточного решения в узлы исходной сетки. В работе построена сплайн-интерполяционная формула, точная на погранслойных составляющих и показано преимущество использования этой формулы в двухсеточном методе по сравнению с формулой полиномиальной сплайн-интерполяции, в случае равномерной сетки. В случае применения разностной схемы на сгущающейся в погранслое сетке Г.И. Шишкина показано, что метод полиномиальной сплайн-интерполяции является равномерно точным, и его можно использовать в двухсеточном методе.

1. Постановка дифференциальной задачи

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y),\ (x,y)\in\Omega;\ u(x,y) = g(x,y),\ (x,y)\in\Gamma, \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 10-01-00726-а.

где $\Omega = (0,1)^2,\ \Gamma = \overline{\Omega}\diagdown\Omega,$ функции a, b, c, f, g - достаточно гладкие,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(y) \geq \beta > 0, \quad c(x,y) \geq 0, \ \varepsilon > 0. \tag{2}$$

При выполнении условий (2) решение задачи (1) является равномерно ограниченным и в соответствии с [1] в нем можно выделить экспоненциальные погранслойные составляющие:

$$u(x,y) = p(x,y) + \Big[g(0,y) - w(0,y)\Big]\Phi(x) + \Big[g(x,0) - w(x,0)\Big]\Theta(y) - \Big[g(0,0) - w(0,0)\Big]\Phi(x)\Theta(y), \tag{3}$$

где $p(x,y) = w(x,y) + O(\varepsilon)-$ регулярная составляющая решения, с равномерно ограниченными первыми производными, $w(x,y)$ – решение вырожденной задачи:

$$a(x)w_x + b(y)w_y - c(x,y)w = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega, \ w(1,y) = g(1,y), \quad w(x,1) = g(x,1),$$

погранслойные составляющие имеют вид:

$$\Phi(x) = \exp(-a(0)\varepsilon^{-1}x), \quad \Theta(y) = \exp(-b(0)\varepsilon^{-1}y). \tag{4}$$

Всюду под C и $C_j, j \geq 0$, подразумеваем постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки.

2. Двухсеточный метод на равномерной сетке

Пусть Ω_h – равномерная сетка области $\bar{\Omega}$, с узлами $\{x_i, y_j\},\ i,j = 0,1,\ldots,N, Nh = 1$.

Сначала остановимся на вопросе сплайн-интерполяции функций с погранслойной составляющей. Пусть для достаточно гладкой функции $u(x,y)$ справедливо представление:

$$u(x,y) = p(x,y) + d_1(x,y)\Phi(x) + d_2(x,y)\Theta(y) + d_3(x,y)\Phi(x)\Theta(y). \tag{5}$$

Предполагаем, что частные производные функций $p(x,y),\ d_j(x,y)$ равномерно ограничены, а функции $\Phi(x), \Theta(y)$ имеют области больших градиентов. В случае задачи (1), в соответствии с (3), эти функции имеют вид (4). В соответствии с [6], при наличии погранслойных составляющих, применение полиномиальной сплайн-интерполяции на равномерной сетке может приводить к погрешностям порядка $O(1)$.

Введем интерполяцию, точную на погранслойных составляющих. Пусть $K_{i,j}-$ произвольная ячейка сетки, $K_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Зададим в ячейке $K_{i,j}$ интерполяцию:

$$I_{\Phi,\Theta}([u]_{\Omega_h}, x, y) = \Big(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}\Big)\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i} \times \frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} +$$

$$+ \Big(u_{i,j+1} - u_{i,j}\Big)\frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} + \Big(u_{i+1,j} - u_{i,j}\Big)\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i} + u_{i,j}, \tag{6}$$

где $u_{i,j} = u(x_i, y_j),\ \Theta_j = \Theta(y_j),\ \Phi_i = \Phi(x_i)$. Интерполяционная формула (6) точна на погранслойных составляющих $\Phi(x), \Theta(y)$ и на их произведении $\Phi(x)\Theta(y)$. Из (6) следует формула полиномиальной интерполяции при задании $\Phi(x) = x,\ \Theta(y) = y$:

$$I_P([u]_{\Omega_h}, x, y) = \Big(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}\Big)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \times \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} +$$

$$+\Big(u_{i,j+1}-u_{i,j}\Big)\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+\Big(u_{i+1,j}-u_{i,j}\Big)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}+u_{i,j}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,y)$ имеет представление (5), где $p(x,y)$ и все функции $d_j(x,y)$ имеют равномерно ограниченные первые частные производные. Пусть функции $\Phi(x),\Theta(y)$ строго монотонны на каждом сеточном интервале. Тогда найдется постоянная C, не зависящая от производных функций $\Phi(x),\Theta(y)$, такая, что*

$$\Big|I_{\Phi,\Theta}([u]_{\Omega_h},x,y)-u(x,y)\Big|\le Ch,\ \ (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

В соответствии с (3) решение задачи (1) содержит экспоненциальные пограничные слои у границ $x=0,y=0$. В [4] доказано, что разностная схема А.М. Ильина, построенная по каждому направлению, в случае задачи (1) является равномерно сходящейся и справедлива оценка точности:

$$\max_{i,j}|u^h_{i,j}-u(x_i,y_j)|\le C_1h^r,\ \ r<1,$$

где r близко к $1/2$. Разностная схема является пятиточечной и ее можно записать в виде:

$$L^hu^h=f^h. \tag{8}$$

Матрица схемы (8) является M-матрицей и ряд итерационных методов для ее разрешения являются сходящимися. Пусть для решения системы (8) применяется сходящийся итерационный метод (Зейделя, переменных направлений или другой) и справедлива оценка сходимости:

$$||u^{(m+1)}-u^h||\le q_h||u^{(m)}-u^h||,\ \ q_h<1,\ \ ||u^h||=\max_{i,j}|u^h_{i,j}|. \tag{9}$$

Пусть Δ_h – точность разностной схемы. Тогда итерации необходимо продолжать, пока не выполнится условие:

$$\|u^{(m)}-u^h\|\le\Delta_h. \tag{10}$$

Учитывая (9), несложно получить, что для этого потребуется

$$N_h\approx d\,N^2\log_{q_h}(\Delta_h/\delta) \tag{11}$$

арифметических действий, где dN^2 – количество арифметических действий, необходимое для выполнения одной итерации, $\delta=||u^{(0)}-u^h||$.

Количество арифметических действий можно существенно сократить, если предварительно осуществить итерации на более грубой сетке. Введем равномерную сетку с шагом H, $H\gg h$. Предварительно решаем задачу (1) на сетке Ω_H. Далее необходимо найденное сеточное решение $u^{(m_H)}$ проинтерполировать в узлы исходной сетки Ω_h. Для этого воспользуемся сплайн-интерполяционной формулой (6) и зададим начальное приближение для итераций на сетке Ω_h :

$$u^I_H=[I_{\Phi,\Theta}(u^{(m_H)},x,y)]_{\Omega_h}.$$

В соответствии с леммой 1 для некоторой постоянной C_1

$$||u^I_H-u^h||\le C_1(H+\Delta_H).$$

В случае схемы из [4] $\Delta_H > H$, тогда двухсеточный метод потребует

$$N_{Hh} \approx d\, n^2 \log_{q_H} \frac{\Delta_H}{\delta} + I_H + d\, N^2 \log_{q_h} \frac{\Delta_h}{\Delta_H} \tag{12}$$

арифметических действий, где I_H – число арифметических действий, необходимых для интерполяции. Из (11)-(12) следует выигрыш в числе арифметических действий при применении двухсеточного метода:

$$N_h - N_{Hh} \approx d(N^2 - n^2) \log_{q_H} \left(\frac{\Delta_H}{\delta}\right) - I_H.$$

Если порядок точности разностной схемы (8) выше первого, то в двухсеточном методе необходимо использовать более точную сплайн-интерполяционную формулу.

Можно решить задачу, как для заданного шага h подобрать крупный шаг H, чтобы выигрыш в количестве арифметических действий был наибольшим. Считая, что $\Delta_H \ll \delta$, получим уравнение на H : $\quad H^2 = h^2(1 - \ln H^2)$.

3. Двухсеточный метод на сетке Г.И. Шишкина

Остановимся на случае, когда равномерная сходимость разностной схемы для задачи (1) обеспечивается сгущением сетки в пограничных слоях. А именно, пусть Ω_h – сетка Г. И. Шишкина [2] :
$h_1,\ H_1$ – шаги сетки по x в пограничном слое и вне его, $h_2,\ H_2$ – шаги сетки по y в пограничном слое и вне слоя; в пограничном слое и вне слоя одинаковое число сеточных интервалов,

$$h_j = 2\sigma_j/N,\ H_j = 2(1-\sigma_j)/N,\ j = 1, 2,\ \sigma_1 = \frac{2\varepsilon}{\alpha} \ln N,\ \sigma_2 = \frac{2\varepsilon}{\beta} \ln N. \tag{13}$$

Для решения задачи (1) на введенной неравномерной сетке применим схему направленных разностей. Известно, что схема направленных разностей на сетке Г.И. Шишкина является равномерно сходящейся и для некоторой постоянной C справедлива оценка [2] :

$$\max_{i,j} |u^h_{i,j} - u(x_i, y_j)| \le C \ln(N)/N. \tag{14}$$

Схема направленных разностей в двумерном случае может быть разрешена на основе итераций. Для того, чтобы итерационная погрешность не превышала погрешности разностной схемы, при итерациях необходимо добиться выполнения условия (10) при $\Delta_h = \ln(N)/N$. Для этого потребуется число арифметических действий, соответствующее (11). Количество арифметических действий можно уменьшить, по аналогии со случаем равномерной сетки, воспользовавшись двухсеточным методом.

Итак, зададим $n \ll N$ и решаем задачу (1) на основе схемы направленных разностей на сетке, аналогичной (13), содержащей n интервалов. Для разрешения схемы осуществляем итерации, пока не выполнится:

$$\|u^{(m)} - u^H\| \le \frac{\ln(n)}{n}.$$

Для интерполяции найденного сеточного решения на сетку Ω_h используем полиномиальную сплайн-интерполяцию (7).

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ является решением задачи (1). Пусть сетка Ω_h задана в соответствии с (13). Тогда для некоторой постоянной C_1*

$$\Big| I_P([u]_{\Omega_h}, x, y) - u(x,y) \Big| \le C_1 \frac{\ln^2 N}{N^2},\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Зададим $u_H^I = [I_P(u^{(m_H)}, x, y)]_{\Omega_h}$. С учетом леммы 2 получим, что для некоторой постоянной C_2

$$||u_H^I - u^h|| \le C_2 \ln(n)/n.$$

Итак, построено начальное приближение к решению системы (8) с точностью $O(\ln(n)/n)$. Далее остается осуществить итерации на исходной сетке Ω_h для достижения точности $O(\ln(N)/N)$.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x + 2u_y - u = -\frac{2y}{1+y}e^x,\ (x,y) \in (0,1)^2,\ u(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \Gamma. \quad (15)$$

Для решения задачи (15) на равномерной сетке применяем схему из работы К.В. Емельянова [4], о которой говорилось выше. Для разрешения линейной пятиточечной разностной схемы используем метод Зейделя, задав начальную итерацию в виде $u_{i,j}^{(0)} = x_i y_j,\ (x_i, y_j) \in \Omega_h$. Выполнение условия (10) проверяем на основе верного, в случае задачи (1), соотношения:

$$\|u^{(m)} - u^h\| \le \alpha^{-1} \|L^h u^{(m)} - f^h\|.$$

В табл. 1 приведено количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке с шагом $h,\ h = 1/N$, и на вспомогательной сетке с шагом $H,\ H = 1/n$ (число итераций на грубой сетке указано в скобках), при различных N и n. При этом $\varepsilon = 0.001$. В левой части таблицы рассмотрен случай экспоненциальной интерполяции (6), в правой - полиномиальной интерполяции (7). В нижней строке таблицы приведено количество итераций в случае односеточного метода. Из результатов экспериментов видно, что использование экспоненциальной интерполяции (6) приводит к существенному сокращению количества итераций на исходной сетке с шагом h, следовательно, и к выигрышу в количестве арифметических действий в сравнении с решением задачи на одной сетке. Полиномиальная интерполяция при малых значениях ε приводит к значительным погрешностям, поэтому не происходит существенного сокращения числа итераций на мелкой сетке при ее использовании в двухсеточном методе.

В табл. 2 приведены результаты сравнения односеточного и двухсеточного методов с заданием оптимального H, с применением интерполяционной формулы (6). Как и в табл. 1, представлено число итераций на исходной сетке и в скобках - на грубой сетке с n_{opt} количеством узлов, $\varepsilon = 0.001$. Выигрыш в числе итераций очевиден.

Т а б л и ц а 1. Число итераций односеточного и двухсеточного методов при $\varepsilon = 0.001$, экспоненциальная интерполяция - слева, полиномиальная интерполяция - справа

n	N			
	2^5	2^6	2^7	2^8
2^2	15 (5)	31 (5)	63 (5)	127 (5)
2^3	11 (13)	23 (13)	47 (13)	95 (13)
2^4	11 (29)	23 (29)	47 (29)	95 (29)
2^5		19 (58)	43 (58)	95 (58)
2^6			33 (113)	69 (113)
2^7				55 (220)
	58	113	220	431

n	N			
	2^5	2^6	2^7	2^8
2^2	58 (5)	113 (5)	219 (5)	430 (5)
2^3	57 (13)	112 (13)	219 (13)	430 (13)
2^4	55 (29)	111 (29)	218 (29)	429 (29)
2^5		108 (58)	216 (58)	427 (58)
2^6			212 (113)	423 (113)
2^7				417 (220)
	58	113	220	431

Т а б л и ц а 2. Число итераций с выбором оптимального шага H, $\varepsilon = 0.001$

N	n_{opt}	Число итераций двухсеточного метода	число итераций односеточного метода
32	12	11 (21)	58
64	23	24 (42)	113
128	43	47 (78)	220
256	81	98 (142)	431

Список литературы

[1] Roos H.G., Stynes M., Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow problems. Berlin: Springer, 2008. 348 p.

[2] Robust Computational Techniques for Boundary Layers // P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.

[3] Шокин Ю.И., Лисейкин В.Д., Лиханова Ю.В. Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач. Новосибирск: Наука, 2007. 315 с.

[4] Емельянов К.В. Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старшей производной // Краевые задачи для уравнений математической физики: Сб. науч. тр. / РАН. Уральское отделение. 1973. С. 30-42.

[5] Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237-248.

[6] Задорин А.И., Задорин Н.А. Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2010, Т. 50, № 2. С. 221-233.

[7] Vulkov L.G., Zadorin A.I. Two-Grid Algorithms for the Solution of 2D Semilinear Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equations Using an Exponential Finite Difference Scheme // American Institute of Physics Conference proceedings. 2009. V. 1186. P. 371-379.