Устойчивое решение приближенной задачи линейного программирования с поэлементным заданием погрешностей в исходных данных

Ерохин В.И.[1], Тамасян Г.Ш.[1,2]

[1] *Военно–космическая академия имени А.Ф.Можайского, Санкт–Петербург, Россия*
[2] *ИПМаш РАН, Санкт–Петербург, Россия*
vka@mil.ru

Рассматривается задача линейного программирования с интервальными ограничениями:

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0, \quad c^\top x \to \min, \tag{1}$$

$$\underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}, \quad \underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}, \tag{2}$$

где $\underline{A} = (\underline{a}_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\overline{A} = (\overline{a}_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{b}, \overline{b} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ – известные объекты; $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ – объекты, подлежащие определению. Предполагается, что задача (1), (2) разрешима, т.е., существуют гипотетические (неизвестные) вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, матрица $A_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b_0 \in \mathbb{R}^m$ такие что 1) A_0, b_0 удовлетворяют условиям (2); 2) соответствующая задача (1) является собственной; 3) x_0 является ее нормальным решением.

Проблему построения *устойчивого решения* задачи (1), (2) сформулируем как задачу определения матрицы A^* и векторов b^*, x^* таких, что x^* является нормальным решением соответствующей задачи (1) и справедливы условия $\overline{A}-\underline{A} \to 0$, $\overline{b}-\underline{b} \to 0 \Rightarrow A^* \to A_0$, $b^* \to b_0$, $x^* \to x_0$.

Опираясь на результаты работ [1]–[3], можно показать, что справедлива

Теорема. *Пусть система линейных неравенств $\overline{A}^\top p - \underline{A}^\top q \leqslant c$, $p, q \leqslant 0$, где $p, q \in \mathbb{R}^m$, совместна. Тогда 1) разрешима задача квадратичного программирования*

$$x^\top x \to \min, \quad \overline{A}^\top p - \underline{A}^\top q \leqslant c, \quad \underline{A}x \leqslant \overline{b}, \quad -\overline{A}x \leqslant -\underline{b}, \quad c^\top x = b^\top (p-q), \quad p, q, x \geqslant 0; \tag{3}$$

2) относительно вектора $a = (a_j) \in \mathbb{R}^{mn}$ разрешима система линейных неравенств

$$\underline{a} \leqslant a \leqslant \overline{a}, \quad \underline{b} \leqslant Xa \leqslant \overline{b}, \quad Ua \leqslant c,$$

где матрицы $X \in \mathbb{R}^{m\times mn}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times mn}$ и векторы $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}^{mn}$ построены по правилам

$$X = \begin{pmatrix} x^\top & & & \\ & x^\top & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^\top \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 I_n & u_2 I_n & \dots & u_m I_n \end{pmatrix},$$

$\underline{a} = (\underline{a}_{1,1}, \dots, \underline{a}_{1,n}, \underline{a}_{2,1}, \dots, \underline{a}_{2,n}, \dots, \underline{a}_{m,1}, \dots, \underline{a}_{m,n})^\top$, $\overline{a} = (\overline{a}_{1,1}, \dots, \overline{a}_{1,n}, \overline{a}_{2,1}, \dots, \overline{a}_{2,n}, \dots, \overline{a}_{m,1}, \dots, \overline{a}_{m,n})^\top$,

x, p, q — решение задачи (3), $u = p - q$, I_n — единичная матрица порядка n;

3) Вектор $x^* = x$, а также матрица $A^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b^* \in \mathbb{R}^m$, построенные по правилам

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)n+1} & a_{(m-1)n+2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b^* = A^* x^*,$$

являются устойчивым решением задачи (1), (2).

Список литературы

1. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю., Морозов В. А.* Метод поточечной невязки для некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 7. С. 1140—1152.
2. *Иваницкий А. Ю., Урусов А. М.* Численный анализ метода поточечной невязки для решения прямой и двойственной неустойчивой задачи линейного программирования с приближенными данными // Вестн. Чувашского университета. 2018. № 1. С. 108–116.
3. *Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерман К.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008.